

A háromszög területének meghatározása a csúcsok koordinátáinak ismeretében

Erről [1] - ben ez (is) olvasható:

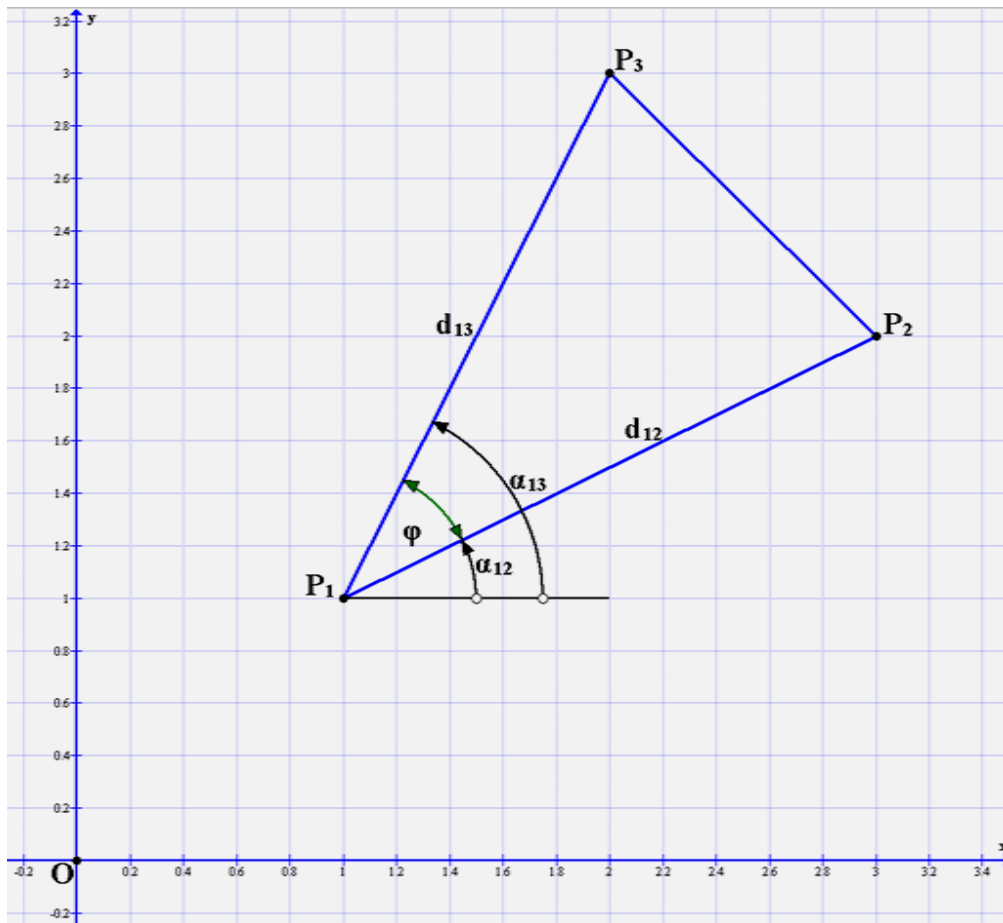
„ Háromszög területe, ha csúcsai $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$:

$$T = \frac{1}{2} \cdot [x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)] \dots \quad (E)$$

Ezekből a képletekből akkor kapunk pozitív értéket a területre, ha a csúcsok körüljárási iránya az óramutató járásával ellenkező; ha a körüljárási irány az óramutató járásával megegyező, a képletek a területre negatív értéket adnak.”

Most ezeknek az információknak járunk utána. Nem mintha nem hinnénk [1] - nek, hanem mert egyszer végig kell járni ezt az utat is.

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Eszerint írhatjuk, hogy:

$$\sin \varphi = \sin(\alpha_{13} - \alpha_{12}) = \sin \alpha_{13} \cdot \cos \alpha_{12} - \cos \alpha_{13} \cdot \sin \alpha_{12} ; \quad (1)$$

ámde:

$$\cos \alpha_{12} = \frac{x_2 - x_1}{d_{12}} ; \quad \sin \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{d_{12}} ; \quad \cos \alpha_{13} = \frac{x_3 - x_1}{d_{13}} ; \quad \sin \alpha_{13} = \frac{y_3 - y_1}{d_{13}} ; \quad (2)$$

most (1) és (2) - vel:

$$\sin \varphi = \frac{y_3 - y_1}{d_{13}} \cdot \frac{x_2 - x_1}{d_{12}} - \frac{x_3 - x_1}{d_{13}} \cdot \frac{y_2 - y_1}{d_{12}}, \text{ innen:}$$

$$d_{12} \cdot d_{13} \cdot \sin \varphi = (y_3 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1). \quad (3)$$

A (3) képlet bal oldalán a háromszög területének kétszerese áll, hiszen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot \sin \varphi ; \quad (4)$$

most (3) és (4) - gyel:

$$T = \frac{1}{2} \cdot [(y_3 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)]. \quad (5)$$

Az (5) képlet akár végeredménynek is tekinthető. Még lássuk be, hogy (5) és (E) egyenértékű! Ehhez (5) - öt átalakítva:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \{x_1 \cdot [y_2 - y_1 - (y_3 - y_1)] + x_2 \cdot (y_3 - y_1) - x_3 \cdot (y_2 - y_1)\}, \text{ innen:}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot [x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)] , \quad (6)$$

egyezésben (E) - vel.

A (6) képlet könnyebben megjegyezhető szerkezetű, mint (5).

A bevezetőben a körüljárási irányról mondtak miatt írhatjuk, hogy:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)|. \quad (7)$$

Megjegyzések:

M1. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó készítse az 1. ábra megfelelőjét, de az óra járásával egyező számozással, és számolja ki így is a képlettel a háromszög területét! De még jobb, ha belátja, hogy miért lép fel az előjelváltás.

M2. Látjuk, hogy az (E) szerinti – eléggé fontos – képlet levezetése már középiskolai matematikai ismeretek birtokában is érthető. Igazából nem rémlik, hogy annak idején tanultuk volna ezt a középiskolában. Az Egyetemen azonban már volt szó sokszögek területének a csúcsok koordinátaival történő kiszámításáról, a Földmérés tananyagában. Mivel a sokszög háromszögekre bontható, mondhatjuk, hogy ez itt egy előtanulmány ahhoz.

M3. Fentieket a [2] - ben láttak inspirálták. A témáról magyarul is találunk olvasnivalót; ld. pl.: [3]!

Források:

[1] – ***I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev***: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

[2] – ***I. M. Vinogradov***: Analitikus geometria
„Nauka”, Moszkva, 1986.

[3] – ***Kürschák József***: Analízis és analitikus geometria, 1. kötet
2. kiadás, Lampel R. R.T., Budapest, 1923.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2020. 02. 18.